CAPITOLO 7

Introduzione agli Spazi di Sobolev

7.1 Spazi di Sobolev

Definizione 7.1.1. Sia Ω aperto connesso non vuoto di $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ [20], $1 \leq p \leq +\infty$; lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ è definito da

$$W^{1,p}(\Omega) := \Bigg\{ u \in L^p(\Omega);\ \exists\, g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) :$$
$$\int_\Omega u(x) \cdot \varphi_{x_i}(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = -\int_\Omega g_i(x) \cdot \varphi(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall\, i = 1, \dots, N \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Bigg\}.$$

Osservazione 7.1.2. Per ogni $i = 1, \dots, N$ la funzione g_i è unica.

Infatti se è anche (per $i = 1, \dots, N$)

$$\int_\Omega u(x) \cdot \varphi_{x_i}(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = -\int_\Omega h_i(x) \cdot \varphi(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,,$$

allora

$$\int_\Omega (g_i(x) - h_i(x)) \cdot \varphi(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = 0 \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

pertanto

$$g_i = h_i \quad \text{q.o. in } \Omega. \quad \square$$

Osserviamo che

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad u \in L^p(\Omega) \quad \text{e} \quad \text{tutte le sue } N \text{ derivate parziali prime nel senso delle distribuzioni sono in } L^p(\Omega),$$

[20] Per gli spazi di Sobolev, anche in dimensione $N = 1$, si può consultare e.g. [1].

giacché dalla definizione si vede che

$$g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

nel senso delle distribuzioni (o in senso debole).

Evidentemente

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)\,;$$

se Ω è aperto connesso e <u>limitato</u> di $\mathbb{R}^N$, si ha

$$C^1(\overline{\Omega}) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)\,.$$

Osservazione 7.1.3. Si riconosce facilmente che

$$\forall\, u, v \in W^{1,p}(\Omega) \implies u + v \in W^{1,p}(\Omega)\,,$$

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega) \implies \lambda u \in W^{1,p}(\Omega)\,,$$

cioè $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale.

Definizione 7.1.4. Definiamo per $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{1,p} := \|u\|_p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p \qquad \text{se } p < \infty$$

$\Big((\|\cdot\|_{1,p}$ è ovviamente una norma in $W^{1,p}(\Omega)$; norme topologicamente equivalenti a $\|\cdot\|_{1,p}$ sono:

$$\left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{e} \qquad \|u\|_p + \|\nabla u\|_p \Big)\,,$$

mentre

$$\|u\|_{1,\infty} := \max\left\{ \|u\|_\infty \,, \|\nabla u\|_\infty \right\} \qquad \text{se } p = \infty\,.$$

(Ricordiamo che una norma $\|\cdot\|$ su uno spazio X è topologicamente equivalente alla norma $\|\cdot\|'$ sullo stesso spazio X se esistono $k_1, k_2 > 0$: $\;k_1 \|x\| \le \|x\|' \le k_2 \|x\| \quad \forall\, x \in X$).

Teorema 7.1.5.

$$\Big(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p} \Big) \text{ \emph{è uno spazio di Banach},} \qquad 1 \le p \le \infty\,.$$

Dimostrazione. Per $1 \leq p < \infty$ sia $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{1,p}$; quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m > \nu \quad \|u_n - u_m\|_{1,p} < \varepsilon.$$

Poiché

$$\|u_n - u_m\|_{1,p} = \|u_n - u_m\|_p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p$$

si ha che (u_n) è di Cauchy in $L^p(\Omega)$ e per ogni $i = 1, \ldots, N$ $\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right)_n$ è di Cauchy in $L^p(\Omega)$.
Per la completezza di $L^p(\Omega)$ si ha che

$$\exists\, u \in L^p(\Omega) : \quad \|u_n - u\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

e per ogni $i = 1, \ldots, N$

$$\exists\, g_i \in L^p(\Omega) : \quad \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - g_i \right\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\,.$$

Basta ora dimostrare che

$$g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N$$

nel senso delle distribuzioni, perché da ciò seguirà in definitiva che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\|u_n - u\|_{1,p} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, cioè la tesi.
Per dimostrare che

$$g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N$$

nel senso delle distribuzioni, proviamo che, per ogni $i = 1, \ldots, N$,

$$\int_\Omega u(x) \cdot \varphi_{x_i}(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = -\int_\Omega g_i(x) \cdot \varphi(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ciò segue, per passaggio al limite per $n \to +\infty$, da

$$\int_\Omega u_n(x) \cdot \varphi_{x_i}(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = -\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \cdot \varphi(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

poiché

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega (u_n(x) - u(x))\, \varphi_{x_i}(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \right| &\leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)|\, |\varphi_{x_i}(x)|\; d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq \|u_n - u\|_p \cdot \|\varphi_{x_i}\|_{p'} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

e

$$\left| \int_\Omega \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - g_i(x) \right) \varphi(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \right| \leq \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - g_i \right\|_p \cdot \|\varphi\|_{p'} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \qquad \square$$

Teorema 7.1.6. *(Teorema di densità (di Friedrichs))*
Sia Ω un aperto connesso di classe C^1; $1 \leq p \lneqq +\infty$.

$$\forall\, u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \exists\, (u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N) : \quad u_n|_\Omega \xrightarrow[n \to +\infty]{} u \quad \textit{in}\; W^{1,p}(\Omega).$$

In altre parole, le restrizioni a Ω di funzioni di $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ costituiscono un sottospazio denso di $W^{1,p}(\Omega)$.

A differenza di quanto accade per gli spazi $L^p(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ non è denso in $W^{1,p}(\Omega)$.

Definizione 7.1.7. Sia $1 \leq p \lneqq +\infty$. Definiamo

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega);\, \exists\, (u_n) \subset C_0^\infty(\Omega) : \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u \text{ in } W^{1,p}(\Omega) \right\}$$

cioè

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)} \qquad \text{nella norma di } W^{1,p}(\Omega)$$

(evidentemente è anche $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^1(\Omega)}$ nella norma di $W^{1,p}(\Omega)$).

In un certo senso dunque, lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ è costituito dalle funzioni che "hanno il valore zero" su $\partial\Omega$. Di conseguenza, due funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ "hanno lo stesso valore su $\partial\Omega$" se la loro differenza appartiene a $W_0^{1,p}(\Omega)$ [21].

Risulta

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega).$$

In generale i due spazi non coincidono, come si deduce dalla considerazione che segue il teorema di Friedrichs, però

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Teorema 7.1.8.

$\left(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p}\right)$ *è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. $W_0^{1,p}(\Omega)$ è un sottospazio di $W^{1,p}(\Omega)$, chiuso nella norma $\|\cdot\|_{1,p}$ perché $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$; poiché ogni sottospazio chiuso di uno spazio completo è completo si ha la tesi. $\square$

[21] Queste questioni vengono trattate con precisione introducendo il concetto di **traccia** di una funzione di $W^{1,p}(\Omega)$ (cfr. e.g. [10]).

7.2 Disuguaglianze di Sobolev in $\mathbf{W^{1,p}(\Omega)}$ (teoremi di immersione continua o compatta)

Definizione 7.2.1. Sia $1 \leq p < N$. Si dice esponente di Sobolev di p il numero reale p^* definito da

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

ovvero

$$p^* = \frac{Np}{N-p} > p.$$

Teorema 7.2.2. *Sia Ω un aperto connesso e limitato di $\mathbb{R}^N$, di classe C^1; allora*

(i) se $1 \leq p < N$: $\quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$

e si ha $\quad \|u\|_{p^*} \leq c\,\|u\|_{1,p} \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$*;*

(ii) se $p = N$: $\quad W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in [N, +\infty[$*;*

(iii) se $p > N$: $\quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) \quad$ *dove* $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p} \quad (0 < \alpha < 1)$*.*

La dimostrazione di (i) è dovuta a Sobolev-Gagliardo-Nirenberg; da (i) e dal fatto che $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $p \leq q \leq p^*$, segue

(i)$'$ se $1 \leq p < N$: $\quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in [p, p^*]$.

La (iii) va intesa nel senso della misura di Lebesgue, cioè nella classe di equivalenza di $u \in W^{1,p}(\Omega)$ esiste $\widetilde{u} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ (rappresentante α-hölderiana) con $\widetilde{u} = u$ q.o. in Ω.

Definizione 7.2.3. Siano X e Y spazi di Banach reali. Un operatore lineare e continuo

$$K : X \to Y$$

si dice *compatto* se per ogni successione $(u_n) \subset X$ limitata, esiste una sottosuccessione $(u_{n_k}) \subset X$ tale che $(K\, u_{n_k})$ converge in Y.

Teorema 7.2.4. *(Teorema di immersione compatta (Rellich - Kondrachov))*
Sia Ω un aperto connesso e limitato di $\mathbb{R}^N$, di classe C^1; allora

(i) se $1 \leq p < N$: l'immersione $\quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad$ *è compatta*

per ogni q tale che $1 \leq q < p^* = \dfrac{Np}{N-p}$

(i.e. da ogni successione limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ si può estrarre una sottosuccessione convergente in $L^q(\Omega)$)*;*

(ii) se $p = N$*: l'immersione* $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *è compatta per ogni* $1 \le q < \infty$ *;*

(iii) se $p > N$*: l'immersione* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ *è compatta*

(conseguenza della disuguaglianza di Morrey e del teorema di Ascoli-Arzelà).

In particolare l'immersione $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *è compatta per ogni* $1 \le p \le \infty$ *.*

Osservazione 7.2.5. In generale, se non si fanno ipotesi di regolarità su $\partial\Omega$, non è vera l'immersione

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

Ad esempio, sia $N = 2$, $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < 1, \quad |y| < e^{-\frac{1}{x^2}}\right\}$ e

$$u(x,y) = x^3 e^{\frac{1}{x^2}}.$$

È immediato verificare che $u \in L^1(\Omega)$ e anche ogni sua derivata parziale prima (in senso classico) appartiene a $L^1(\Omega)$. Dunque $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Ma $u \notin L^p(\Omega)$ per nessun $p > 1$.

Se $p = N$ in generale $u \notin L^\infty(\Omega)$. Ad esempio, se $N = 2$ e $\Omega = B_{\frac{1}{2}}((0,0))$ la funzione

$$u(x,y) = \left(\log \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^\alpha$$

con $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ appartiene a $W^{1,2}\left(B_{\frac{1}{2}}(0,0)\right)$ ma essa non è limitata a causa della singolarità in $(0,0)$.

Ci limitiamo a dimostrare le disuguaglianze di Sobolev (relativamente alle sole immersioni continue) nel sottospazio $W_0^{1,p}(\Omega)$; è utile osservare che (evidentemente) in tale spazio non è necessaria alcuna ipotesi di regolarità su Ω.

7.3 Disuguaglianze di Sobolev in $\mathbf{W_0^{1,p}}(\Omega)$

Teorema 7.3.1. *Sia* Ω *un aperto connesso e* *limitato* *di* $\mathbb{R}^N$*; allora*

(i) se $1 \le p < N$*:* $\quad W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad \forall\, q \in [p, p^*]$

e si ha:

$$\exists\, C(p,N) > 0 : \quad \|u\|_{p^*} \le C(p,N)\, \|\nabla u\|_p \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$ [22]

dove $C(p,N) = \dfrac{p(N-1)}{N-p} = \dfrac{p^*}{1^*}$ *;*

[22] Il valore di p^* si può ottenere mediante un argomento di omogeneità (cfr. e.g. [1], p. 163.)

(ii) se $p = N$: $\qquad W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad \forall\, q \in [N, +\infty[$;

(iii) se $p > N$: $\qquad W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \qquad$ *dove* $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p} \quad (0 < \alpha < 1)$.

Osserviamo che in (i) la costante $C(p,N) = \dfrac{p(N-1)}{N-p}$ non è quella ottimale.

Alla dimostrazione delle disuguaglianze di Sobolev premettiamo il seguente risultato.

Lemma 7.3.2. *(Lemma di Gagliardo)*
Posto

$$\widehat{x}_i := (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \quad \forall\, i = 1, \dots, N \quad (N \geq 2)\,,$$

se le $v_i = v_i(\widehat{x}_i)$ *per ogni* $i = 1, \dots, N$ *sono non negative e* $v_i \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1}_{\widehat{x}_i})$ *allora*

$$v(x) = v_1(\widehat{x}_1) \cdot v_2(\widehat{x}_2) \cdot \dots \cdot v_N(\widehat{x}_N) \in L^1(\mathbb{R}^N_x)$$

e si ha

$$\|v\|_1 = \left\| \prod_{i=1}^N v_i \right\|_{1,\mathbb{R}^N} \leq \prod_{i=1}^N \|v_i\|_{N-1,\mathbb{R}^{N-1}_{\widehat{x}_i}} .$$

Dimostrazione delle disuguaglianze di Sobolev (in $\mathbf{W_0^{1,p}}(\Omega)$).

Dimostrazione di (i).
Dimostreremo (i) prima per $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Poi estenderemo la tesi alle funzioni $u \in W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$.
Primo passo. Sia dapprima $p = 1$; possiamo assumere $\Omega = \mathbb{R}^N$. Allora $C(1,N) = 1$ e la tesi diventa

$$\|u\|_{1^*} = \|u\|_{\frac{N}{N-1}} \leq \|\nabla u\|_1 .$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale (u è a supporto compatto in Ω) si ha:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N)\, d\mathcal{L}^1(t)$$

e quindi

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N)|\, d\mathcal{L}^1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)|\, d\mathcal{L}^1(x_i)$$

per ogni $i = 1, \dots, N$.

Pertanto

$$|u(x)|^{\frac{1}{N-1}} \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)|\, d\mathcal{L}^1(x_i) \right)^{\frac{1}{N-1}} \qquad \forall\, i = 1, \dots, N.$$

Moltiplicando membro a membro risulta

$$|u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)| \; d\mathcal{L}^1(x_i) \right)^{\frac{1}{N-1}} ;$$

posto

$$v_i(\widehat{x}_i) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)| \; d\mathcal{L}^1(x_i) \right)^{\frac{1}{N-1}} ,$$

e applicando il lemma di Gagliardo 7.3.2 si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \; d\mathcal{L}^N(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^{N} v_i(\widehat{x}_i) \, d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq \prod_{i=1}^{N} \|v_i\|_{N-1, \mathbb{R}^{N-1}_{\widehat{x}_i}} \\ &= \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |D_i u(x)| \; d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{N-1}} , \end{aligned}$$

dove per l'ultima uguaglianza basta osservare che

$$\begin{aligned} \|v_i\|_{N-1, \mathbb{R}^{N-1}_{\widehat{x}_i}} &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)| \; d\mathcal{L}^1(x_i) \right)^{\frac{1}{N-1}} \right]^{N-1} d\mathcal{L}^{N-1}(\widehat{x}_i) \right\}^{\frac{1}{N-1}} \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)| \; d\mathcal{L}^1(x_i) \right] d\mathcal{L}^{N-1}(\widehat{x}_i) \right\}^{\frac{1}{N-1}} \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |D_i u(x)| \; d\mathcal{L}^N(x) \right\}^{\frac{1}{N-1}} . \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \; d\mathcal{L}^N(x) &\leq \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |D_i u(x)| \; d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{N-1}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)| \; d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{N}{N-1}} , \end{aligned} \tag{7.1}$$

cioè

$$\|u\|_{\frac{N}{N-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \; d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{N-1}{N}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)| \; d\mathcal{L}^N(x) = \|\nabla u\|_1 .$$

Osserviamo che la (7.1) è vera anche per funzioni di classe $C^1_0(\Omega)$ o per funzioni $C^1(\Omega)$ q.o., a supporto compatto in Ω.

Secondo passo. Sia ora $1 < p < N$ e $u \in C^\infty_0(\Omega)$.
Considerata la funzione ausiliaria

$$v := |u|^{\frac{p^*}{1^*} - 1} \cdot u$$

si ha
$$|\nabla v| = \frac{p^*}{1^*}\, |u|^{\frac{p^*}{1^*}-1}\, |\nabla u| \qquad \text{q.o. in } \Omega$$
dove
$$\frac{p^*}{1^*} = \frac{p(N-1)}{N-p} =: C(p,N)$$
e
$$\frac{p^*}{1^*} - 1 = \frac{N(p-1)}{N-p}\,.$$
Applicando (7.1) a v risulta
$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*}\, d\mathcal{L}^N(x)\right)^{\frac{N-1}{N}} \le C(p,N) \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N(p-1)}{N-p}}\, |\nabla u(x)|\, d\mathcal{L}^N(x)$$
(applicando la disuguaglianza di Hölder)
$$\le C(p,N) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p\, d\mathcal{L}^N(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N(p-1)}{N-p}\cdot p'}\, d\mathcal{L}^N(x)\right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$= C(p,N)\, \|\nabla u\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*}\, d\mathcal{L}^N(x)\right)^{\frac{p-1}{p}}$$
quindi
$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*}\, d\mathcal{L}^N(x)\right)^{\frac{N-1}{N}-\frac{p-1}{p}} \le C(p,N)\, \|\nabla u\|_p\,,$$
e poiché $\dfrac{N-1}{N} - \dfrac{p-1}{p} = \dfrac{1}{p^*}$ risulta in definitiva
$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*}\, d\mathcal{L}^N(x)\right)^{\frac{1}{p^*}} \le C(p,N)\, \|\nabla u\|_p\,.$$

Terzo passo. Dimostriamo ora (i) in $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$. Sia $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, allora
$$\exists\,(u_n) \subset C_0^\infty(\Omega): \quad \|u_n - u\|_{1,p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{7.2}$$
Per quanto già dimostrato si ha
$$\|u_n\|_{p^*} \le C(p,N)\, \|\nabla u_n\|_p \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{7.3}$$
(osserviamo che $C(p,N)$ non dipende da $n \in \mathbb{N}$). Da (7.3) e (7.2) segue che (u_n) è di Cauchy in $L^{p^*}(\Omega)$, pertanto
$$\exists\, v \in L^{p^*}(\Omega): \quad \|u_n - v\|_{p^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
Osserviamo che
$$0 \le \|u-v\|_p \le \|u_n - u\|_p + \|u_n - v\|_p \le \|u_n - u\|_p + |\Omega|^{\frac{1}{N}}\, \|u_n - v\|_{p^*}\,,$$
da qui, passando al limite per $n \to +\infty$, si deduce che $v = u$ q.o. in Ω. Allora passando al limite per $n \to +\infty$ nella (7.3) si ha in definitiva
$$\|v\|_{p^*} = \|u\|_{p^*} \le C(p,N)\, \|\nabla u\|_p\,,$$

cioè la tesi. $\square$

Dimostrazione di (ii).

Basta provare (ii) per le funzioni $u \in C_0^\infty(\Omega)$, perché poi si estende per densità a $W_0^{1,N}(\Omega)$.

Proviamo che

$$\exists\, C > 0 : \quad \|u\|_q \leq C\,\|u\|_{1,N} \quad \forall\, q \in [N, +\infty[\quad \forall\, u \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Da (7.1) si ha, per $u \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\|u\|_{\frac{N}{N-1}} \leq \|\nabla u\|_1\,. \tag{7.4}$$

Considerata la funzione ausiliaria

$$v := |u|^t \qquad (t > 1)$$

da (7.4) risulta

$$\begin{aligned}\|u\|^t_{\frac{tN}{N-1}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{t\cdot\frac{N}{N-1}}\, d\mathcal{L}^N(x)\right)^{\frac{N-1}{N}} \\ &\leq t\cdot\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{t-1}|\nabla u|\, d\mathcal{L}^N(x) \leq t\,\|u\|^{t-1}_{(t-1)p'}\cdot\|\nabla u\|_p\,.\end{aligned}$$

Segue che

$$\|u\|_{\frac{tN}{N-1}} \leq t^{\frac{1}{t}}\,\|u\|^{\frac{t-1}{t}}_{(t-1)p'}\cdot\|\nabla u\|_p^{\frac{1}{t}} \leq e^{\frac{1}{e}}\,\|u\|^{\frac{t-1}{t}}_{(t-1)p'}\cdot\|\nabla u\|_p^{\frac{1}{t}}\,.$$

Possiamo supporre

$$\|u\|^{\frac{t-1}{t}}_{(t-1)p'} > 0 \qquad \text{e} \qquad \|\nabla u\|_p^{\frac{1}{t}} > 0$$

(diversamente la tesi è banale).

Per la disuguaglianza di Young (osservato che $\dfrac{t-1}{t} + \dfrac{1}{t} = 1$) si ha (ricordato che per ipotesi $p = N$)

$$\|u\|^{\frac{t-1}{t}}_{(t-1)p'}\cdot\|\nabla u\|_p^{\frac{1}{t}} \leq \frac{t-1}{t}\,\|u\|_{(t-1)\frac{N}{N-1}} + \frac{1}{t}\,\|\nabla u\|_N\,,$$

quindi

$$\begin{aligned}\|u\|_{\frac{tN}{N-1}} &\leq e^{\frac{1}{e}}\left(\frac{t-1}{t}\,\|u\|_{(t-1)\frac{N}{N-1}} + \frac{1}{t}\,\|\nabla u\|_N\right) \\ &\leq e^{\frac{1}{e}}\left(\|u\|_{(t-1)\frac{N}{N-1}} + \|\nabla u\|_N\right) \\ &\leq C\left(\|u\|_{(t-1)\frac{N}{N-1}} + \|\nabla u\|_N\right),\end{aligned}$$

con $C = e^{\frac{1}{e}}$. Poiché la disuguaglianza precedente vale per ogni $t > 1$, in particolare essa è vera per $t = N$ (essendo $N \geq 2$):

$$\|u\|_{\frac{N^2}{N-1}} \leq C\left(\|u\|_N + \|\nabla u\|_N\right)$$

e quindi (per densità)

$$W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N^2}{N-1}}(\Omega).$$

Osservato che $\dfrac{N^2}{N-1} > N$, si ha anche (per interpolazione (Teorema 4.4.1))

$$W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad \forall\, q \in \left[N, \frac{N^2}{N-1}\right] \quad ;$$

iterando questo argomento con $t = N+1$, $t = N+2, \ldots$, si ha la tesi.

Notiamo, infine, che per dimostrare (ii) è sufficiente anche osservare che per $p \to N$ risulta $p^* = \dfrac{Np}{N-p} \to +\infty$. Osserviamo che la costante $C(p,N) = \dfrac{p(N-1)}{N-p} \to +\infty$ per $p \to N$. □

Dimostrazione di (iii) *(disuguaglianza di Morrey).*

Ricordiamo che posto per $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$

$$\|u\|_\alpha := \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + [u]_{0,\alpha}$$

$\|\cdot\|_\alpha$ è una norma in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e lo spazio

$$\left(C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\alpha\right)$$

è completo.

È sufficiente provare che

$$\exists\, C(p,N) > 0 : \quad [u]_{0,\alpha} \le C(p,N)\,\|\nabla u\|_p \qquad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{7.5}$$

e

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le C(p,N)(diam\,\Omega)^\alpha\,\|\nabla u\|_p \qquad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{7.6}$$

Proviamo prima la (7.5) e poi la (7.6) in $C_0^\infty(\Omega)$; queste si estendono poi per densità a $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Per provare la (7.5) dimostriamo che

$$\begin{aligned}\exists\, C(p,N) > 0 : \quad \forall\, x, y \in \Omega, \quad x \ne y,&\\ |u(x) - u(y)| \le C(p,N) \cdot |x-y|^\alpha \cdot \|\nabla u\|_p \quad &\forall\, u \in C_0^\infty(\Omega).\end{aligned}$$

Sia $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $x, y \in \Omega$, $x \ne y$. Poniamo $\delta := |x-y| > 0$ e

$$S := B_\delta(x) \cap B_\delta(y) \cap \Omega.$$

Risulta

$$|u(x) - u(y)| \le |u(z) - u(x)| + |u(y) - u(z)| \quad \forall\, z \in S.$$

Integrando su S rispetto a z si ha:

$$|S| \cdot |u(x) - u(y)| \le \int_S |u(z) - u(x)|\; d\mathcal{L}^N(z) + \int_S |u(y) - u(z)|\; d\mathcal{L}^N(z).$$

Ma $|B_\delta| = \omega_N \delta^N$ da cui $|S| = C(N)\delta^N$ e quindi

$$C(N)\delta^N |u(x) - u(y)| \le \int_S |u(z) - u(x)| \, d\mathcal{L}^N(z) + \int_S |u(y) - u(z)| \, d\mathcal{L}^N(z). \tag{7.7}$$

Valutiamo il primo integrale; il secondo si maggiorerà allo stesso modo.
Osservato che

$$u(z) - u(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u\left(x + t(z-x)\right) \, d\mathcal{L}^1(t) = \int_0^1 (z-x) \cdot \nabla u(w) \, d\mathcal{L}^1(t)$$

dove $w = x + t(z-x)$, si ha per ogni $z \in S$

$$|u(z) - u(x)| \le \int_0^1 |z-x| \cdot |\nabla u(w)| \, d\mathcal{L}^1(t) \le \delta \int_0^1 |\nabla u(w)| \, d\mathcal{L}^1(t)$$

e integrando rispetto alla variabile $z \in S$

$$\begin{aligned} \int_S |u(z) - u(x)| \, d\mathcal{L}^N(z) &\le \delta \int_S d\mathcal{L}^N(z) \int_0^1 |\nabla u(w)| \, d\mathcal{L}^1(t) \\ &= \delta \int_0^1 d\mathcal{L}^1(t) \int_S |\nabla u(w)| \, d\mathcal{L}^N(z). \end{aligned}$$

Ora (osservato che $|z-x| < \delta \implies |w-x| < t\delta$)

$$\int_S |\nabla u(w)| \, d\mathcal{L}^N(z) \le \int_{B_\delta(x)} |\nabla u(w)| \, d\mathcal{L}^N(z) = t^{-N} \int_{B_{t\delta}(x)} |\nabla u(w)| \, d\mathcal{L}^N(w).$$

Usando la disuguaglianza di Hölder il secondo membro si maggiora:

$$\begin{aligned} \int_{B_{t\delta}(x)} 1 \cdot |\nabla u(w)| \, d\mathcal{L}^N(w) &\le |B_{t\delta}(x)|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{t\delta}(x)} |\nabla u(w)|^p \, d\mathcal{L}^N(w) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \omega_N^{1-\frac{1}{p}} (t\delta)^{N\left(1-\frac{1}{p}\right)} \cdot \|\nabla u\|_p . \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int_S |u(z) - u(x)| \, d\mathcal{L}^N(z) &\le \omega_N^{1-\frac{1}{p}} \cdot \delta^{N+1-\frac{N}{p}} \cdot \|\nabla u\|_p \cdot \int_0^1 t^{-\frac{N}{p}} \, d\mathcal{L}^1(t) \\ &\qquad \text{(con } p > N \text{ per ipotesi)} \\ &= \omega_N^{1-\frac{1}{p}} \cdot \delta^{N+1-\frac{N}{p}} \cdot \|\nabla u\|_p \cdot \frac{1}{1-\dfrac{N}{p}} \\ &= \omega_N^{1-\frac{1}{p}} \cdot \delta^{N+\alpha} \cdot \|\nabla u\|_p \cdot \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Tornando a (7.7) si ha

$$C(N)\delta^N |u(x) - u(y)| \le 2 \cdot \omega_N^{1-\frac{1}{p}} \cdot \delta^{N+\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \|\nabla u\|_p$$

da cui

$$|u(x) - u(y)| \le \frac{2\omega_N^{1-\frac{1}{p}}}{\alpha C(N)} \cdot \delta^\alpha \cdot \|\nabla u\|_p = C(p,N) \cdot |x-y|^\alpha \cdot \|\nabla u\|_p$$

e quindi (7.5).

Proviamo la (7.6).

Sia $y \in \Omega$ tale che $u(y) = 0$. Dalla (7.5) si ricava

$$|u(x)| \leq C(p,N) \cdot |x-y|^{\alpha} \cdot \|\nabla u\|_p \leq C(p,N) \cdot (diam\,\Omega)^{\alpha} \cdot \|\nabla u\|_p$$

per ogni $x \in \Omega$ e quindi segue la (7.6). □

7.4 Disuguaglianze di Poincaré

Teorema 7.4.1. ***(Disuguaglianza di Poincaré in*** $\mathbf{W_0^{1,p}(\Omega)}$***)***
Sia Ω un aperto connesso e limitato di $\mathbb{R}^N$; allora

$$\exists\, C(\Omega,p,N) = C(p,N)\,|\Omega|^{\frac{1}{N}} > 0 :$$
$$\|u\|_p \leq C(\Omega,p,N)\,\|\nabla u\|_p \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall\, 1 \leq p \lneqq +\infty.$$

Osserviamo che l'ipotesi "Ω limitato" può essere indebolita richiedendo che Ω sia limitato almeno in una direzione, ma non può essere eliminata.

Dimostrazione della disuguaglianza di Poincaré.

Sia $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $1 \leq p < \dfrac{N}{N-1}$. Per il caso (i) delle disuguaglianze di Sobolev $\left(\text{osservato che } \dfrac{N}{N-1} \leq N \text{ poiché } N \geq 2\right)$ si ha

$$\|u\|_{p^*} \leq C(p,N)\,\|\nabla u\|_p\,.$$

Poiché $p^* > p$ si ha $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ e quindi

$$\|u\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}} \cdot \|u\|_{p^*} = |\Omega|^{\frac{1}{N}}\,\|u\|_{p^*}\,.$$

Pertanto

$$\|u\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{N}} \cdot C(p,N)\,\|\nabla u\|_p = C(\Omega,p,N)\,\|\nabla u\|_p$$

per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Sia ora $p \geq \dfrac{N}{N-1}$; definiamo $r := \dfrac{Np}{N+p}$ e osserviamo che $1 \leq r < N$ $\left(r \geq 1 \iff p \geq \dfrac{N}{N-1}\right)$.

Considerato $r^* = \dfrac{Nr}{N-r}$ (l'esponente di Sobolev di r), risulta $r^* = p$ e quindi, ancora per il caso (i) delle disuguaglianze di Sobolev

$$\|u\|_p = \|u\|_{r^*} \leq C(r,N)\,\|\nabla u\|_r \leq C(\Omega,p,N)\,\|\nabla u\|_{r^*=p}\,. \quad \square$$

Corollario 7.4.2. *In $W_0^{1,p}(\Omega)$ le norme $\|u\|_{1,p}$ e $\|\nabla u\|_p$ sono topologicamente equivalenti.*

Infatti

$$\|\nabla u\|_p \le \|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p \le (C(\Omega,p,N)+1)\,\|\nabla u\|_p \qquad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad \square$$

Osservazione 7.4.3. La disuguaglianza di Poincaré dimostrata in $W_0^{1,p}(\Omega)$ non vale per le costanti non-identicamente nulle in Ω. Ciò preclude pertanto la possibilità che quella stessa disuguaglianza possa valere in $W^{1,p}(\Omega)$.

Tuttavia sussiste il seguente risultato

Teorema 7.4.4. ***(Disuguaglianza di Poincaré in $\mathbf{W^{1,p}(\Omega)}$)***
Sia Ω un aperto connesso e limitato di $\mathbb{R}^N$, di classe C^1; allora

$$\exists\, C(\Omega,p,N) > 0 : \quad \|u - u_\Omega\|_p \le C(\Omega,p,N)\,\|\nabla u\|_p \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega),$$

dove

$$u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\,d\mathcal{L}^N(x) \quad .$$

Osservazione 7.4.5. Nelle ipotesi della disuguaglianza di Poincaré (in $W^{1,p}(\Omega)$), se $1 \le p < N$ si ha la seguente **disuguaglianza di Sobolev-Poincaré**

$$\|u - u_\Omega\|_{p^*} \le c(\Omega,p,N)\,\|\nabla u\|_p \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega).$$